Recasages possibles : 148, 162
Référence : Oraux X-ens Algèbre 2, Francinou, Gianella, Nicolas (p. 160-163, 174).

Développement

Lemme 1 Soient K un corps et $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Le rang de A est la taille maximale d'une matrice carrée extraite de A inversible. En particulier, si L est une extension de corps de K, alors $\text{rang}_L(A) = \text{rang}_K(A)$.

Théorème 2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On note $C(A)$ le commutant de A, *i.e* l'ensemble des matrices $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telles que $AB = BA$. Alors, $\dim\big(C(A)\big) \geqslant n$. En particulier, on a $C(A) = K[A]$ si et seulement si $\mu_A = \chi_A$.

- *Preuve du Lemme 1* : Soit $A = (a_{ij})_{i,j\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(K)$. Si $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note L_i la i-ème ligne de A et C_j la j-ème colonne de A. Notons $r = \text{rang}_K(A)$ et s le maximum des tailles des matrices carrées inversibles extraites de A, c'est-à-dire la taille maximale d'un mineur non nul de A. Pour $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k \in [\![1, n]\!]$, on note $A_{[i_1,\dots,i_k;j_1,\dots,j_k]}$ la matrice carrée de taille k constituée des lignes $L_{i_1}, \dots, L_{i_k}$ et des colonnes $C_{j_1}, \dots, C_{j_k}$ de A. Autrement dit,

$$A_{[i_1,\dots,i_k;j_1,\dots,j_k]} = (a_{ij})_{\substack{i\in\{i_1,\dots,i_k\}\\ j\in\{j_1,\dots,j_k\}}} \in \mathcal{M}_k(K).$$

  On va montrer que $r = s$ par double inégalité :
  Tout d'abord, soit $i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_s \in [\![1, n]\!]$ tels que $A_{[i_1,\dots,i_s;j_1,\dots,j_s]}$ soit inversible. On peut alors affirmer que $(C_{j_1}, \dots, C_{j_s})$ est une famille libre. En effet, si $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$ sont tels que $\lambda_1 C_{j_1} + \cdots + \lambda_s C_{j_s} = 0$, en ne gardant que les coordonnées $i_1, \dots, i_s$ de cette égalité entre vecteurs de K^n, on en déduit que $\lambda_1 \widetilde{C_{j_1}} + \cdots + \lambda_s \widetilde{C_{j_s}} = 0$, où C_{j_k} est la colonne j_k de la matrice $A_{[i_1,\dots,i_k;j_1,\dots,j_k]}$. Ainsi, comme $A_{[i_1,\dots,i_k;j_1,\dots,j_k]}$ est inversible, ses colonnes sont linéairement indépendantes et $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$. Par conséquent, la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A est au moins s, *i.e* $r \geqslant s$.
  Comme $r = \text{rang}(A)$ on peut choisir r colonnes parmi celles de A qui forment une famille libres (par le théorème de la base extraite). Notons $j_1, \dots, j_r$ leurs indices. On construit alors la matrice $B = (a_{ij})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in\{j_1,\dots,j_r\}}} \in \mathcal{M}_{n,r}(K)$. Par construction, $\text{rang}(B) = r$ et comme $\text{rang}(B)$ est aussi la dimension de l'espace vectoriel engendré par les lignes de B (*i.e* $\text{rang}(B) = \text{rang}(B^\top)$), on peut extraire de B r lignes linéairement indépendantes. Si on note leurs indices $i_1, \dots, i_r$ et si on pose $C = (a_{ij})_{\substack{i\in\{i_1,\dots,i_r\}\\ j\in\{j_1,\dots,j_r\}}} \in \mathcal{M}_r(K)$, alors C est de rang r donc c'est une sous-matrice inversible de A d'où $s \geqslant r$.
  Finalement, on a bien montré que le rang de A est la taille maximale d'une matrice inversible extraite de A. Soit alors L une extension de K. Les mineurs de A sont les mêmes que l'on voit A comme élément de $\mathcal{M}_n(K)$ ou de $\mathcal{M}_n(L)$ (ce sont des déterminants de sous-matrices de A) et leur nullité ne dépend pas du corps dans lequel on se place, donc $\text{rang}_L(A) = \text{rang}_K(A)$.

- *Preuve du Théorème 2* : Notons $\mathcal{T}_n^+(K)$ la sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(K)$ constituée des matrices triangulaires supérieures. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.
  · Montrons que si $A \in \mathcal{T}_n^+(K)$, on a $\dim\big(C(A)\big) \geqslant n$. Supposons que $A \in \mathcal{T}_n^+(K)$. On a $\dim\big(C(A)\big) \geqslant \dim\big(C(A) \cap \mathcal{T}_n^+(K)\big)$. Or $C(A) \cap \mathcal{T}_n^+(K)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(K)$ constitué des matrices X triangulaires supérieures telles que $AX - XA = 0$. Comme pour $X \in \mathcal{T}_n^+(K)$, on a $AX - XA \in \mathcal{T}_n^+(K)$, cette égalité matricielle est un système linéaire homogène à au plus $\frac{n(n+1)}{2}$ équations (celles correspondant aux coefficients en-dessous strictement de la diagonale étant de la forme $0 = 0$) et $\frac{n(n+1)}{2}$ inconnues (les coefficients potentiellement non nuls de X). En fait, comme chaque coefficient diagonal de AX et de XA est le produit du coefficient diagonal de même indice de A par celui de X, les équations "diagonales" sont également de la forme $0 = 0$. Ainsi, $C(A) \cap \mathcal{T}_n^+(K)$ est l'espace des solutions d'un système linéaire homogène avec au plus $\frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}$ équations et $\frac{n(n+1)}{2}$ inconnues. Il est donc de dimension au moins $\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n$, et on obtient bien $\dim\big(C(A)\big) \geqslant n$.

  · Montrons que si A est trigonalisable, alors $\dim\big(C(A)\big) \geqslant n$. Supposons A trigonalisable : il existe $P \in \text{GL}_n(K)$ et $T \in \mathcal{T}_n^+(K)$ telle que $A = PTP^{-1}$. Alors, pour $X \in \mathcal{M}_n(K)$, on a

$$AX = XA \Leftrightarrow (PTP^{-1})X = X(PTP^{-1}) \Leftrightarrow T(P^{-1}XP) = (P^{-1}XP)T$$

  Ainsi, $X \in C(A) \Leftrightarrow P^{-1}XP \in C(T) \Leftrightarrow X \in PC(T)P^{-1}$. Or, l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, donc conserve la dimension, et donc $\dim\big(C(A)\big) = \dim\big(PC(T)P^{-1}\big) = \dim\big(C(T)\big) \geqslant n$ car $T \in \mathcal{T}_n^+(K)$.

  · Montrons désormais le cas général. Notons $\chi_A \in K[X]$ le polynôme caractéristique de A. On considère un corps de décomposition de χ_A, noté L.

Considérons alors les applications suivantes :

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(K) & \to & \mathcal{M}_n(K) \\ X & \mapsto & AX - XA \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \widetilde{\Phi} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(L) & \to & \mathcal{M}_n(L) \\ X & \mapsto & AX - XA \end{array} \right.$$

D'après le **Lemme 1**, on a $\text{rang}_K(\Phi) = \text{rang}_L(\widetilde{\Phi})$. Ainsi, par le théorème du rang, on a

$$\begin{aligned} \dim_K\big(\text{Ker}(\Phi)\big) &= \dim_K\big(\mathcal{M}_n(K)\big) - \text{rang}_K(\Phi) \\ &= n^2 - \text{rang}_K(\Phi) \\ &= n^2 - \text{rang}_L(\widetilde{\Phi}) \\ &= \dim_L\big(M_n(L)\big) - \text{rang}_L(\widetilde{\Phi}) \\ &= \dim_L\big(\text{Ker}(\widetilde{\Phi})\big) \end{aligned}$$

Or, $\text{Ker}(\Phi) = C_K(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(K) : AB = BA\}$ par définition, et comme A est trigonalisable en tant qu'élément de $\mathcal{M}_n(L)$, on a d'après le raisonnement précédent que $\dim_L\big(\text{Ker}(\widetilde{\Phi})\big) = \dim_L\big(C_L(A)\big) \geqslant n$. Ainsi, on a bien finalement $\dim_K\big(C_K(A)\big) \geqslant n$.

Pour terminer la preuve du **Théorème 2**, montrons l'équivalence

$$C(A) = K[A] \Leftrightarrow \mu_A = \chi_A$$

où μ_A et χ_A désignent respectivement le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de A. Notons tout d'abord que comme A commute avec ses puissances, par linéarité, on a toujours $K[A] \subset C(A)$. Par ailleurs, montrons que $\dim\big(K[A]\big) = \deg(\mu_A) =: d$. On considère le morphisme surjectif de K-algèbres

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} K[X] & \longrightarrow & K[A] \\ P(X) & \longmapsto & P(A) \end{array} \right.$$

Comme μ_A est par définition l'unique générateur unitaire du noyau de ce morphisme, Ψ induit par factorisation un isomorphisme $K[A] \simeq K[X]/(\mu_A)$. Or, la division euclidienne dans $K[X]$ par μ_A implique que la famille $\left(\overline{1}, \overline{X}, \ldots, \overline{X}^{d-1}\right)$ est une base du K-espace vectoriel $K[X]/(\mu_A)$, qui est donc de dimension d, tout comme $K[A]$. En particulier, comme d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\mu_A \mid \chi_A$, on a $\dim\big(K[A]\big) \leqslant n$.

$\Rightarrow$: Supposons que $C(A) = K[A]$. Alors, $n \leqslant \dim\big(C(A)\big) = \dim\big(K[A]\big) \leqslant n$, donc $\dim\big(K[A]\big) = n$ et donc $\deg(\mu_A) = n$. Or, $\deg(\chi_A) = n$ et $\mu_A \mid \chi_A$ donc comme ces deux polynômes sont unitaires, on a $\mu_A = \chi_A$.

$\Leftarrow$: Supposons que $\mu_A = \chi_A$. Alors, la matrice A est cyclique, c'est-à-dire qu'il existe $x \in K^n$ tel que $(x, Ax, A^2x, \ldots, A^{n-1}x)$ soit une base de K^n. Considérons l'application linéaire $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} C(A) & \to & K^n \\ B & \mapsto & Bx \end{array} \right.$. Si $B \in \text{Ker}(\varphi)$, on a $Bx = 0$ et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $BA^kx = A^kBx = A^k0 = 0$. Ainsi, tout $B \in \text{Ker}(\varphi)$ s'annule sur une base de K^n, donc est nul. L'application φ est donc injective et ainsi $\dim\big(C(A)\big) \leqslant \dim(K^n) = n$. Or, on a aussi $\dim\big(K[A]\big) = \deg(\mu_A) = \deg(\chi_A) = n$ et comme $K[A] \subset C(A)$, on a $C(A) = K[A]$.